Edwin Gräupl

Philosophie der Mathematik

Grundlagen einer Fachdidaktik

2012



iBooks Author

Vorwort

Tatsächlich beruht, ob man das nun wahrhaben will oder nicht, alle mathematische Pädagogik .. . auf einer Philosophie der Mathematik

(Rene Thom, zitiert nach: Mathematiker über die Mathematik, Springer 1974, pag 5).

Auf einigen der folgenden Seiten habe ich erstmals vor 1970 das Wesen der Mathematik philosophisch so dargestellt, dass für den mathematischen Unterricht daraus Folgerungen gezogen werden können. Diese Konsequenzen sind jetzt hier auch wirklich formuliert.

In der ausgeführten philosophischen Position wird man Einflüsse des Wiener Kreises, Ludwig Wittgensteins und der zeitgenössischen angelsächsischen Philosophie bemerken.

Dieser Text ist eine verbesserte, ergänzte und aktualisierte Neufassung eines Aufsatzes, der im Jahresbericht des Akademischen Gymnasiums Salzburg 1981 veröffentlicht wurde.

Allgemeine Charakteristik

1

Sprachspiel

1.1 Information und Sprachspiel

Unter Information will ich hier Aussagen über Sachverhalte, oder allgemeiner, Züge in einem Sprachspiel verstehen. Verständlich heißt die Information dann, wenn ich in der Lage bin, jene Aussagen auch gebrauchen oder auf diesen Zug entsprechend antworten zu können. Jemand empfängt nun einen Zeichenkomplex. Da dies nicht isoliert geschieht, sondern in einem größeren Zusammenhang, kann er diesen Komplex auch dann für eine Information halten, wenn er nicht weiß, wie diese Zeichen zu gebrauchen sind. Er wird dann von einer unverständlichen Information sprechen.

Erfahrungsgemäß reizt diese Situation die Neugierde, es entsteht das Bedürfnis diese Zeichen auch gebrauchen zu können. Der triviale Fall einer unverständlichen Information liegt vor, wenn die sie konstituierenden Aussagen in einer dem Empfänger unbekannten Sprache gemacht werden. Für unsere Betrachtungen ist aber der Fall wichtig, daß der Empfänger trotz seiner Sprachkenntnis die Information nicht gebrauchen kann. Das kann eintreten, wenn sehr viele Zeichen in rascher Folge übermittelt werden, so dass der Empfänger sie nicht mehr verarbeiten kann. Wichtiger ist für uns der andere Fall, daß diese Informationen etwa schriftlich vorliegen, also das Verarbeitungstempo im Belieben des Empfängers liegt, aber so umständlich formuliert sind, daß sie der Empfänger trotzdem nicht gebrauchen kann. Dazu ein Beispiel. Höre oder lese ich



„Gib mir Geld!", so kann ich diese Information gebrauchen. Sie weist mir eine bestimmte Rolle zu, von der ich weiß, wie sie zu spielen ist. Diese Aufforderung gibt mir also das Startzeichen zu einem mir wohlbekannten Spiel. Höre ich aber „Gib mir nie kein Geld nicht!", so kann ich mit dieser Information, so wie sie hier vorliegt, noch nichts anfangen. Ich weiß nicht, was ich tun soll. Hier setzt die Notwendigkeit ein, für einen derartigen Fall neue Verhaltensformen zu überlegen.

Ich kann den Kontakt zum Informanten (manchmal) abbrechen, dieses Spiel nicht spielen („Lass mich in Ruhe!"). Diese Haltung wird im Extremfall zum Selbstmord führen müssen. Für den, der weiterleben will, bleibt die Notwendigkeit, mehr oder weniger „mitzuspielen". Dazu muß man aber die Spielzüge der Partner beurteilen können, sie verstehen. Deshalb kann ich versuchen zu bitten: „Das habe ich nicht verstanden, sag es verständlicher!" Ich verlange hier also vom Informanten, seine Information umzuformen. Dem liegt die Vermutung zugrunde, dass die gegebene Information in anderer Form so gegeben werden kann, dass ich in der Lage bin, sie zu gebrauchen.

Hege ich diese Vermutung, so könnte ich auch genauso irgendeinen anderen Menschen bitten, diese Umformung vorzunehmen, oder ich könnte es selbst versuchen. Liegt hier nicht ein Widerspruch vor? Wie kann ich eine Information, die ich nicht gebrauchen kann, also damit nicht umgehen kann, bearbeiten?

Nun ist es doch so, dass ich dem Zeichenkomplex als Ganzem ratlos gegenüberstehe, nicht aber den Elementen dieses Komplexes, ihre Verwendung kenne ich ja. Ich muß nun das, was in einfacheren Fällen mein Gehirn automatisch besorgt, bewußt durchführen, nämlich, wie es etwa in unserem Beispiel erforderlich ist, die Zusammenfassung mehrerer Zeichen in eines. Hier versteht man „Gib mir kein Geld nicht!" als,,Gib mir Geld!" Setzt man nun „nie" wieder ein, so heißt es „Gib mir nie Geld!"

Somit wurde am Beispiel gezeigt, daß es Informationen gibt, die vorerst unbrauchbar sind, dann aber nach einer Umformung, der wir zustimmen können, verständlich und brauchbar werden.

Warum aber formuliert der Spielpartner seinen Zug nicht immer gleich für mich verständlich? Es gibt Situationen, für die die Antwort auf der Hand liegt, dann nämlich, wenn der Partner (oder Gegner) davon einen Vorteil hat.



Physische Welt

1.2.1 Die physische Welt und ihr Informationsgehalt

Wichtiger für uns sind jene Spiele, in denen die Natur selbst als Spielpartner auftritt. Man wird einwenden, dass die Natur selbst keine Informationen formuliert, sondern dass ich es bin, der das Verhalten der Natur, also die Tatsachen, beschreibt. Ich brauche diese Beschreibung ja nur so zu formulieren, dass ich sie verwenden kann. Das ist nun aber oft nicht möglich, wie bereits ein einfaches Beispiel zeigt, etwa die Bestimmung der Entfernung Erde-Mond. Es kann hier keine Messung der fraglichen Größe selbst vorgenommen werden (gedacht ist an das Messen mit dem Maßstab), sondern es können nur Aussagen über greifbare Tatsachen gemacht werden, also Entfernungen auf der Erde, Blickwinkel zum Mond. Erst durch Umformung dieser Aussagen (die an Hand bestimmter Vorstellungen über die Raumstruktur vorgenommen werden) gelangt man zu einer brauchbaren Information, nämlich derart, daß die Entfernung in Metern angegeben wird.

Wir wollen nun versuchen, jene Informationen zu charakterisieren, deren Eigenschaft, zugleich wichtig und unverständlich zu sein, die Erfindung der mathematischen Methoden nahelegte.

Es gibt Aussagen, die sich mit den Empfindungen selbst, den Qualitäten, beschäftigen, und es gibt Aussagen, die zwischen den Empfindungen Beziehungen herstellen. Sie sind durch das



folgende Kriterium zu unterscheiden: Für Aussagen der ersten Art ist die empfundene Qualität als solche wesentlich, während es bei Aussagen der zweiten Art nicht auf die Qualität selbst, sondern nur auf ihre Konstanz ankommt(1).

Damit ein Lebewesen sich in seiner Umwelt zurechtfinden kann, ist es notwendig, dass gleiche Bedingungen gleiche Empfindungen hervorrufen; die Qualität der Empfindung ist (in Grenzen) zur Orientierung, zur Ordnung der Eindrücke, nicht relevant. Wie steht es aber mit den Qualitäten selbst? Die Erfahrung lehrt, dass es etwa unmöglich ist, einem Blindgeborenen die Farbempfindungen mitzuteilen, sieht man von so schwachen Aussagen wie: „Grün ist angenehm" ab. Aber selbst solche Aussagen werden nicht von allen Empfindenden gebilligt. Daraus folgt, daß die empfundene Qualität in ihrem vollen Umfang nicht durch die Sprache mitteilbar ist und daß das Wenige, das mitgeteilt werden kann, keine allgemeine Zustimmung findet. Offenbar empfinden verschiedene Menschen verschieden. Objektiv überprüfbar können also nur Aussagen der zweiten Art sein, auf sie wird sich die Wissenschaft stützen.

Der normale Mensch hat die Wörter „kein", „ein", „zwei", „drei" und „viele" so zur Verfügung wie etwa „grün" oder „blau". Sein Gehirn befähigt ihn, sie einer Situation unmittelbar zu- oder absprechen zu können. („Da ist kein Haus." „Der Baum ist grün." „Dort sind zwei Wolken.") Es muß dabei allerdings gesagt werden, daß die Eindrücke „zwei", „drei" usw. von der Grundstimmung des Urteilenden abhängen, also von der Art, wie er die Welt sieht. Je nachdem, worauf seine Aufmerksamkeit gerichtet ist und was er als für sich bestehenden Aspekt der Welt zu betrachten gewohnt ist, wird er unter sonst gleichen Bedingungen z. B.: „kein" oder „drei" empfinden („Da ist kein Gasthaus." „Da sind drei Wegweiser"). Wie bereits erwähnt, betrachten wir nun nicht die Qualität der Empfindung, die wir haben, wenn wir etwa „zwei" mit Recht zusprechen, sondern Relationen zwischen diesen Empfindungen. Zum Beispiel interessiert es uns, daß man, wenn man zu zwei Dingen ein Ding dazugibt, die Empfindung „drei Dinge" hat.

Es hat sich nun gezeigt, dass man durch Ausweitung der Wortfamilie „kein", „ein" usw. mächtige Werkzeuge erhält, die den Aufbau technischer Zivilisationen ermöglichen, die dem Menschen - nach verbreiteter Ansicht - Vorteile im „Lebensspiel" gewähren. So wie aus zwei Dingen, die um ein Ding vermehrt werden, drei Dinge entstehen, führen wir , ‚vier" als Vermehrung von „drei" ein und so weiter. Diese Wörter gehören aber alle zur Empfindung „viele", unser Gefühl leitet uns nicht in ihrem korrekten Gebrauch. Aussagen der zweiten Art, in denen Wörter der erweiterten Familie „kein", „ein" usw. vorkommen, wollen wir Aussagen mit quantitativen Relationen nennen. Da sie einerseits besonders nützlich, andererseits aber im Gebrauch sehr schwierig sind, liegen sie ja außerhalb der

Automatik unseres Gehirns, bedürfen sie, um sie brauchbar zu machen, ganz besonders der Umformung.

1.2.2 Die Grenzen der Autarkie

Kann nun jedermann bei Bedarf die nötige Umformung selbst vornehmen? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir diese Operation genauer betrachten. Weiter oben wurde bereits erwähnt, dass eine unverständliche Information in den uns interessierenden Fällen aus wohlbekannten Zeichen aufgebaut ist, deren Zusammenwirken von unserem Gehirn nicht mehr automatisch überblickt werden kann. Dieses Zusammenwirken, das die Mitteilung konstituiert, muss in solchen Fällen nun bewusst und schrittweise unter Beachtung der Verwendungsregeln der Einzelzeichen aufgebaut werden, solange bis die Information verständlich wird. Dabei ist, wie schon angedeutet, wohl klar, wie mit den Zeichen umgegangen werden muß, aber woher weiß man, was man tun soll? Ein einfaches Beispiel möge diesen Sachverhalt etwas veranschaulichen.

Es wird mit Zündhölzern folgende „Gleichung" auf den Tisch gelegt: VII = I. Diese falsche Behauptung soll nun durch Umlegen eines Streichholzes in eine wahre Aussage verwandelt werden. Man weiß genau, wie man mit einem Streichholz hier umzugehen hat (man nimmt es an einer Stelle fort und legt es an anderer Stelle wieder nieder), aber man weiß durchaus nicht, was man zu tun hat, soll heißen: Welches Streichholz soll wohin gelegt werden? Welche Methoden wendet man nun in einem solchen Fall an?

bis der Erfolg erreicht ist, also zu probieren. Natürlich kann ich mir das jeweilige Umlegen eines Hölzchens auch nur vorstellen. Rationeller wird dieser Lösungsweg dadurch, dass man durch vorhergehende Überlegung, welche Figuren hier überhaupt in Frage kommen, das Probieren, sei es nun nur gedacht oder auch tatsächlich ausgeführt, einschränkt und leitet. Schließlich und endlich gibt es auch die Möglichkeit, dass man jenen Teil der Struktur der Lösung, der schon vorliegt, ohne Überlegung (= „inneres" Probieren) als solchen erkennt und die Lösung plötzlich angeben kann: VT= I (Wurzel aus eins ist gleich eins). Kehren wir nun zur Frage zurück, ob jedermann bei Bedarf die nötigen Umformungen vornehmen könne.

Wie unser Beispiel zeigt, gibt es da einmal das triviale Hindernis des Zeitmangels, hinter dem allerdings oft genug eine bedrohliche und unwürdige Lebenssituation steht. Noch zwei weitere Schwierigkeiten treten oft auf, nämlich allzu grosse Komplikation der Regeln zur Verwendung der Einzelzeichen und dann der Mangel einer Idee (des plötzlichen Erkennens einer Struktur). Diese Hürden vermag, wenn überhaupt, nur ein Mensch zu nehmen, der viel Übung in solchen Dingen und einen dazu besonders geeigneten Verstand hat. Wie man hier deutlich sieht, kann also erst eine

arbeitsteilige Gesellschaft an die Umformung schwierigerer Informationen gehen.

Es liegt nun in der Natur des menschlichen Lebens, dass sich bestimmte Probleme in ähnlicher Form immer wieder stellen. Hier eröffnet sich dem, der so ein Problem zu bewältigen vermochte, eine große Möglichkeit. Wenn es ihm nämlich gelingt, sich selbst den Ablauf der Problemlösung verständlich und bewusst zu machen, so kann er einen Algorithmus entwickeln.

Unter Algorithmus versteht man ein mitteilbares (lehrbares) Verfahren zur Problemlösung.

Ein derartiges Verfahren beseitigt die Notwendigkeit des planlosen Probierens oder des oft vergeblichen Wartens auf eine Idee. Ein einfaches Beispiel für einen Algorithmus ist das übliche Divisionsverfahren.

Es wäre ein großer Irrtum anzunehmen, dass es einfach sei, aus einer speziellen Problemlösung den allgemeinen Algorithmus abzulesen, oder dass heute alle bekannten Problemlösungen bereits als Teile von Algorithmen erkannt worden wären. Bei vielen Problemen bedarf es noch immer der in jedem Spezialfall neuen Idee, die man nicht erzwingen kann. Algorithmen sind ihrer Natur gemäß in ihrer Struktur so durchsichtig, dass es möglich ist, Maschinen zu bauen, die nach bestimmten Algorithmen ablaufen. Das heißt natürlich nicht, dass die Maschine den Algorithmus versteht, so wie ja auch ein fallender Mensch auch ohne Kenntnis der Fallgesetze diese befolgt.

Wir sind in unserer Betrachtung nun so weit vorgeschritten, dass wir versuchen können festzulegen, was man unter Mathematik verstehen soll.

Wie Wittgenstein bemerkt hat, ist die Definition der Mathematik deswegen so schwierig, wenn nicht unmöglich, weil zwar immer ein Teilgebiet mit einem anderen Ähnlichkeit hat, ohne dass man aber deswegen sagen könnte, ob es überhaupt etwas gibt, was alle Teilgebiete gemeinsam haben (2).

Ich habe daher versucht, jene Wurzeln zu bestimmen, aus der die Disziplinen der Mathematik hervorwachsen. Entfernen sich manche Zweige auch sehr von ihrem Ursprung, so bleibt doch der Zusammenhang und damit die Berechtigung dieser Charakterisierung gewahrt. Weiter oben wurde gezeigt, daß besonders Informationen, die quantitative Begriffe enthalten, einerseits wegen ihrer Wichtigkeit, andererseits wegen ihrer Schwierigkeit der Umformung bedürfen. Um anzudeuten, daß bei der Aufbereitung der Information an ihrem Inhalt nichts verändert wird, sprechen wir von Äquivalenzumformungen.

Jenen Bereich menschlichen Handelns, der derartige Äquivalenzumformungen zum Ziel hat, sowie jenes Gebiet menschlichen Wissens, das die rechten Anleitungen zu solchen

Umformungen und den Überblick über bereits vorgenommene Transformationen beinhaltet, nennen wir die Wurzeln der Mathematik.

Es wurde auch gezeigt, dass dieser Bereich notwendigerweise von Spezialisten betreut wird, die für ihre Mitmenschen teils Algorithmen, teils fertige Problemlösungen produzieren.





Grundbegriffe

2

Natürliche Zahlen

2.1.1. Die natürlichen Zahlen

Wie ich schon weiter oben angedeutet habe, verfügt der Mensch über die Wörter „kein", „ein", „zwei", „drei" und „viele" in sehr ähnlicher Weise wie über Wörter wie z. B. „grün". Der Unterschied besteht darin, dass „grün", wie auch immer die Interessenlage des Menschen seinen Wahrnehmungsbereich strukturiert, als solches erkannt wird, währenddem bei derselben Umweltsituation etwa „drei" oder „kein" empfunden wird, worauf sich die Aufmerksamkeit eben gerade richtet.

Zu der, wie schon früher erwähnt, vorteilhaften Erweiterung dieser kleinen Wortfamilie führt man nun den Zählprozess ein. Dieses Verfahren leistet zweierlei, nämlich erstens werden dadurch die gewünschten neuen Wörter gebildet, und zweitens besitzt man in ihm das geeignete Hilfsmittel, um eindeutig feststellen zu können, ob dieser neugebildete Prädikator (3) einem Aspekt der Welt zu- oder abgesprochen werden soll. Durch die Kenntnis dieses Verfahrens versteht man also die Zahlwörter, d. h„ man kann sie entsprechend verwenden. Wie führt man den Zählprozess nun durch, oder einfacher, wie zählt man? Dazu ist es vor allem einmal erforderlich, daß man sich darüber klar ist, worauf man seine Aufmerksamkeit zu richten hat, und dann auch dabei bleibt. Es muß einerseits jener Teil der Erscheinungswelt, in dem sich jene Konfiguration, der ein



Zahlwort zugesprochen werden soll, befindet, räumlich und zeitlich zur Bestimmung eben jener Konfiguration abgegrenzt werden und andererseits die Aufmerksamkeit auf jene Gestalten eingestellt werden, aus denen die Konfiguration aufgebaut ist. Damit gezählt werden kann, ist es selbstverständlich nötig, die zu zählenden Gestalten als solche erkennen zu können. Diese Fähigkeit ist beim Menschen durchaus begrenzt, er vermag nicht, alles unmittelbar zu zählen. Immer dann, wenn nun im räumlich und zeitlich begrenzten Aufmerksamkeitsbereich, der in einer geeigneten Weise die betreffende Konfiguration überstreicht, eine zu zählende Gestalt als solche erkannt wird, wird ihr im Sinne seines natürlichen Gebrauchs das Wort „eins" zugeschrieben. Dadurch entsteht der neue Prädikator „eins eins . . . eins" (oder wenn man in den Pausen „und" einfügt: „eins und eins . . ."), von dem man sagt, dass er der Konfiguration, die seine Herstellung „gesteuert" hat, zukomme.

Da nun der Gebrauch eines unter Umständen sehr langen Wortgebildes unbequem ist, führt man dafür per Definition Abkürzungen ein wie „zwei" für „eins eins" und so weiter.

Man muss also zwischen „zwei(1)" und „zwei(2)" unterscheiden, wobei „zwei(1)" unmittelbar gehandhabt wird, während „zwei(2)" als Abkürzung für „eins eins" in entsprechender Weise zu gebrauchen ist. Die Erfahrung, dass „zwei(1)" und ,,zwei(2)" denselben Konfigurationen zu- oder abgesprochen wird, hat zu dieser Äquivokation geführt. Es sei darauf hingewiesen, daß man es in der Arithmetik immer mit „zwei(2)" zu tun hat. Entsprechendes gilt für „drei". Welche Voraussetzungen muß man nun erfüllen, um Zahlwörter verstehen, das heißt anwenden zu können? Diese Frage interessiert deswegen, weil durch ihre Beantwortung der „Grund", auf dem die „Zahlen" ruhen, sichtbar werden wird.

Aus unserer Analyse des Zählvorganges lesen wir ab, daß dazu erstens die Fähigkeit, gewisse Gestalten zu erkennen, notwendig ist. Zweitens muss man ausreichend handlungsfähig sein, einerseits in systematischer Weise die abzuzählende Konfiguration beobachten und andererseits das Wortgebilde „eins eins . . . eins" bilden zu können. Wenn sich die (jedenfalls beim Menschen) begrenzte Fähigkeit, Gestalten unmittelbar zu erkennen, auch auf Inhalte sprachlicher Mitteilungen erstreckt, so dass unabhängig von der gewählten Ausdrucksweise die Rolle dieser Mitteilung im Sprachspiel erkannt wird, so bringt eine derartige Zählfähigkeit offenbar das Sprachverständnis mit sich. Umgekehrt ermöglicht es eine ausreichende Sprachbeherrschung, wie man sich leicht überlegt, bestimmte Konfigurationen (z. B. Wörter in Sätzen) abzuzählen. Wir können daher sagen, dass sich gewisse Sprach- und Zählfähigkeiten wechselseitig implizieren. Wer sprechen kann, kann daher zumindest potentiell auch schon zählen. „Zahlen" brauchen einem sprachbeherrschenden Individuum gegenüber daher nicht „begründet" zu werden, sondern es müssen



lediglich die Regeln des Zählverfahrens innerhalb der Sprache charakterisiert werden (4).



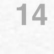
Mengen

2.1.2. „Eins" und die Menge

Wir untersuchen nun die Fähigkeit des Gestalterkennens. Diese ist für die Mathematik besonders wichtig, liegt sie doch auch der Verwendung und damit Bedeutung des fundamentalen Zahlwortes „eins" zugrunde.

Diese Fähigkeit hat einen inneren und einen äußeren Aspekt.

Was uns besonders interessiert, die innere Seite des Vorgangs, der beim Erkennen einer Gestalt abläuft, entzieht sich doppelt der Sprache. Einerseits ist die empfundene Qualität, noch dazu eine so schwache, von vielen stärkeren Empfindungen überdeckte (man sieht ja nicht „eins" für sich, sondern immer „eine Gurke", „eine Tomate" usw.), wie wir bereits wissen, nicht mitteilbar, andererseits setzt die Fähigkeit, die Sprache gebrauchen zu können, die Kenntnis dieser Qualität bereits voraus, denn wie sollte man sonst ein Wort als solches erkennen können. Welchen Sinn kann es aber nun haben, eine Qualität, die sich wie immer der sprachlichen Beschreibung entzieht, jemandem mitzuteilen, der dadurch, dass er die Sprache versteht, sich als einer ausgewiesen hat, der diese Qualität aus eigener Erfahrung kennt? Wenden wir uns jetzt der äußeren Seite zu. Damit ist der objektiv beschreibbare Aspekt gemeint, also z. B.: was ich wie schnell als solches zu





erkennen vermag, wie das zu dieser Leistung befähigende Nervensystem strukturiert ist, wie die Sprachregeln für die Zuschreibung von „eins" lauten und ähnliches. Die Untersuchung dieser Phänomene setzt die Fähigkeit des Gestalterkennens voraus, wodurch man an Münchhausens Zopfgeschichte erinnert wird. Wir können hier klärend sagen, dass durch derartige Forschungen das, worüber man automatisch und unbewusst verfügt, in seinem äußeren Aspekt zu Bewusstsein gebracht wird. Bei diesen Untersuchungen erkennt man, dass es unmöglich ist, mit Hilfe der Sprachregeln festzustellen, ob jemand einem Teil der Welt „eins" mit Recht zugesprochen hat oder nicht, sofern er dabei nur konsequent bleibt. Ob wir daher eine Erscheinung unserer Erfahrungswelt als selbständiges Ganzes oder als Teil einer umfassenderen Einheit auffassen, liegt nur an unserer Einstellung. Daher legen wir fest, dass, was auch immer mit dem Prädikator „eins" bezeichnet wird, mit Recht so bezeichnet wird.

Erweitert man nun diese Regel dahingehend, dass sie über die vorfindbaren Erscheinungen der Raum-Zeit-Welt hinaus auch auf abstrakte Begriffe angewendet werden kann, so stellen sich dann Schwierigkeiten ein, wenn man der Meinung ist, dass, sobald man ein Kriterium dafür, ob etwas zu den zusammenfassenden Dingen gehöre oder nicht, man sich die so bestimmte Zusammenfassung zur Einheit als fertig vorgenommen vorstellen dürfe.

Der Glaube, dass die durch ein bestimmtes Kriterium gesteuerte, schrittweise Bildung einer Einheit (Menge) einer wohldefinierten Zielmenge zustrebe, ist ebenso irrig wie die Annahme, dass jede definierte Folge konvergent sei. Wichtig ist dabei vor allem, dass das Kriterium, ob etwas zur Gesamtheit gerechnet werden solle oder nicht, nur den Prozess der Bildung dieser Gesamtheit steuert und nur dann gewissermaßen als Name dieser Gesamtheit aufgefasst werden darf, wenn dieser Bildungsprozess tatsächlich zu einer wohldefinierten Gesamtheit hinführt. Hat man also eine Regel, mit deren Hilfe man eine Gesamtheit konstituieren will, so muss man sich erst davon überzeugen, ob das auch durchführbar ist, erst dann kann man von dieser Menge sprechen. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, tritt das Problem der Menge bisweilen in anderer Form auf, dann nämlich, wenn die Elemente, die zur Menge zusammengefasst werden sollen, selbst nicht fertig vorliegen, sondern (unabhängig von einer eventuellen Mengenkonstruktion) in unendlicher Entwicklung begriffen sind. In diesem Fall ist dann notwendig, die Menge als das Primäre zu denken, aus der nach Regeln ihre Elemente herstellbar sind. Die Menge enthält dann ihre Elemente nur potentiell, sie ist eine Über-Regel, aus der die Spezialregeln zur (endlosen) Herstellung einzelner Elemente folgen (5).

Das Kontinuum

2.1.3. „Kein" und das Kontinuum

Mir scheint für unsere Überlegungen besonders der Fall wichtig zu sein, dass das Wort „kein" nicht nur im Hinblick auf eine bestimmte Gestalt, sondern als Ausdruck der Unfähigkeit, eine Gestalt überhaupt feststellen zu können, ausgesprochen wird. Es ist wohl klar, dass ein derartiges Urteil weitestgehend von der Erkenntnisfähigkeit des urteilenden Subjekts abhängt. Wir nehmen an, dass ein Mensch z. B. innerhalb eines Teils seines Sichtfeldes keinerlei Struktur, keine Gestalten also, feststellen kann. Innerhalb dieses Bereichs unterscheidet sich für diesen Menschen eine Stelle (das ist ein Ort, auf den sich die Aufmerksamkeit richten kann) von der anderen nur darin, wie sie sich zu den Grenzen dieses Bereichs verhält. Sonst sind die Stellen ununterscheidbar, ist doch die eine genau so wenig Substrat einer Gestalt wie die andere. Dieser durchaus subjektive Befund, diese spezielle Empfindung, wird mit dem Prädikator „Kontinuum" bezeichnet. Einem derartigen Bereich, innerhalb dessen sich eine Stelle von der anderen nur durch ihre Beziehung zum Rand unterscheidet, kommt nur als Ganzem Gestalt zu, er ist eine Gestalt, die keine Gestalten enthält.

Strukturiert man einen Teil dieses Bereichs oder trennt man ihn ab, so ist der verbleibende Rest wieder eine keine Gestalten



enthaltende Gestalt. Das Kontinuum ist, wenn man so will, die ,,atomare Gestalt". Ist sie auch teilbar, so entstehen doch durch die Teilung nur Objekte, die dem ungeteilten wesensgleich sind (6). Theoretisch kann man offenbar derartige Teilungen an beliebigen Stellen und beliebig oft vornehmen.

Ich möchte nun am Beispiel des Films eine Situation beschreiben, die das Erlebnis des Kontinuums besonders deutlich vermittelt.

Immer dann, wenn der Mensch eine Gestalt erkannt hat und diese Gestalt an ihrer ursprünglichen Stelle im Sichtfeld verschwindet und an einer anderen Stelle dieselbe Gestalt erscheint, glaubt man, diese als die ursprüngliche wieder zu erkennen und empfindet die Ortsveränderung als „kontinuierliche Bewegung", sofern sich nur der zeitliche und räumliche Abstand der Orte des Verschwindens und Erscheinens in bestimmten, für den Menschen charakteristischen, Grenzen hält.

Dieser Eindruck der Bewegung schließt die subjektive Sicherheit ein, Sprünge ausschließen zu können. Man ist sicher, dass es zwischen zwei Orten des Körpers keine Stelle gibt, an der man den Körper nicht auch wahrgenommen hätte. Es sind also alle Stellen der ununterbrochenen Bahn zu ihrer Zeit Substrat der bewegten Gestalt.

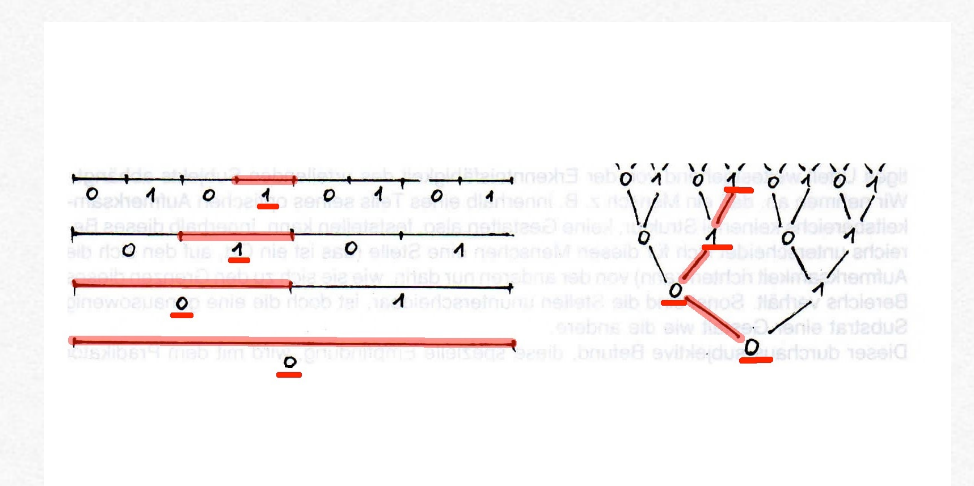
Der Bereich, in dem sich diese Bewegung abspielt, hat, soweit er nur als Substrat der Bewegung betrachtet wird, die Struktur des Kontinuums, d. h. er hat eben keine, alle Stellen sind gleichwertig. Man kann sich etwa die Bewegung an jeder Stelle angehalten denken. Es stellt sich jetzt die interessante Aufgabe, das Kontinuum, das wir als das Substrat eines beliebigen Strukturaufbaus (der von den Grenzen her und in bezug auf sie in das leere Feld hineingebaut wird) kennengelernt haben, in dieser seiner typischen Eigenschaft durch ein Spiel mit Zahlen nachzubilden.

Dabei verstehe ich unter Zahlen die Zahlwörter, soweit sie nicht als Prädikatoren, sondern nur im Hinblick auf ihre gegenseitigen Beziehungen (wie Spielfiguren) gebraucht werden. Dabei darf allerdings nicht vergessen werden, daß die Spielregeln von den Verwendungsregeln der Zahlwörter herrühren. In bekannter Weise konstruiert man aus diesen Spielfiguren, die aus den natürlichen Zahlwörtern entstanden sind, umfassendere Zahlbereiche dadurch, dass man auf dem Boden des Grundspiels immer kompliziertere Spiele definiert (z. B. „ganze Zahlen" als Klassen von Paaren natürliche Zahlen).

Zurück zu unserer Aufgabe! Aus Gründen der Einfachheit wählen wir das eindimensionale Kontinuum (eine Strecke) zur Nachbildung als Zahlenspiel. Die charakteristische Strukturierbarkeit dieses Substrats fassen wir in der Form, daß wir die Strecke für beliebig teilbar halten. Wir stellen uns nun



vor, dass die Strecke immer wieder in gewisser Weise geteilt wird, und bilden diesen Vorgang in einem Zahlenspiel (7), das nachfolgend beschrieben wird, ab. Dazu ist es erforderlich, dem links vom Teilungspunkt liegenden Streckenteil die Null, dem rechten dagegen die Zahl eins zuzuordnen. Man veranschaulicht die andauernden Teilungen und Zuordnungen durch einen „Baum".



So entspricht die Zahlenfolge (0,0,1,1) jenem Streckenteil, der in einem achtgeteilten Kontinuum links von drei, rechts von vier Abschnitten umschlossen wird. Der unendliche Baum ist nun in seiner nicht endenden Verzweigung ein Bild der immer wieder vornehmbaren Teilung des Kontinuums. Entsprechend der Tatsache, daß jeder Teil des Kontinuums wieder ein Kontinuum ist, wurzelt in jeder Verzweigungsstelle unseres Baumes wieder ein neuer unendlich wachsender Baum.

Diesen Baum stellen wir nun als Zahlenspiel symbolisch durch die Folge (0, a(1), a(2),...) dar, wobei a(n)∈ {0, 1}.

Spricht man von der Menge der Punkte unseres Kontinuums (denen bestimmte unendliche Folgen entsprechen), so wird man die allgemeine Bildungsregel (0, a(1), a(2), ...) meinen müssen, aus der durch entsprechende Ersetzung der a(n) durch 0 oder 1 alle Bezeichnungen unendlicher Teilungen und damit auch der Punkte hervorgehen.

Darüber, welche Regeln für den Übergang von (0, a(1), a(2), ...) zur speziellen „reellen Zahl" z. B. (0,1,1 . ..), also für die Herstellung der Elemente des als Menge betrachteten Kontinuums, zulässig sind, sind verschiedene Ansichten möglich. Wir wollen uns darauf beschränken, einige Auffassungen kurz zu besprechen.

Die Intuitionisten nehmen an, dass die Spezialisierung von (0, a(1), a(2),..) derart in der Zeit fortschreitend vorgenommen



wird, dass man zum Zeitpunkt der Entscheidung über die Ersetzung von a(n) durch 1 oder 0 eventuell noch nicht weiß, was zu seiner Zeit mit a(n+1) geschehen wird. Die einzige Möglichkeit, die Folge anzugeben, besteht darin, sie in ihrer unendlichen Länge herzustellen. Daraus ergibt sich wegen der endlichen Natur des Menschen, dass man sich auf einen endlichen Teil der Folge (etwa die ersten n Zahlen) zu beschränken hat (8). Lässt man, wie es die Konstruktivisten tun, dagegen berechenbare Folgen, d. h. bei denen zu jedem Zeitpunkt jede Zahl der unendlichen Folge in endlich vielen Schritten erhalten werden kann, zu, so kann der Algorithmus, der die Berechnung ermöglicht, als eindeutiger endlicher Name der Folge aufgefasst und damit anscheinend die ganze Folge und nicht nur ein Teil mathematisch relevant werden. Es erhebt sich allerdings die Frage, ob es das endliche Bildungsgesetz wirklich gestattet, (alle) Fragen über die dadurch festgelegte „reelle Zahl" in endlich vielen Schritten zu beantworten.

Die „klassische" Position, die von den meisten Mathematikern eingenommen wird, beschränkt weder die Art der Beschreibung noch erkennt sie Grenzen des menschlichen Urteilsvermögens als wesentlich an.



Unendlich

2.1.4. „Unendlich" und der mathematische Gegenstand

Das Problem, das es nun zu bearbeiten gilt, liegt darin, ob Fragen, zu deren Beantwortung das Durchlaufen eines unendlichen Prozesses, womit wir ein Spiel, dem die Institution des Endes fehlt (9), bezeichnen , nötig scheint, immer, manchmal oder gar nicht durch eine nur endlich viele Schritte umfassende Überlegung beantwortet werden können.

Aus der Theorie der unendlichen Zahlenfolgen wissen wir, dass anscheinend zumindest manchmal ein unendlicher Prozess durch ein treues endliches Bild überschaubar gemacht werden kann. Wir wollen das an einem Beispiel überdenken.

Die Zahlenfolge (1/2, 2/3, 3/4,....n/n+1...) hat 1 zum Grenzwert, was bekanntlich bedeutet, dass die Differenz 1-a(n) beliebig klein wird, wenn man nur n entsprechend wählt. Es gibt aber kein $n \in N$ derart, dass $a(n) = 1$ würde. Es ist also keineswegs so, dass die Glieder der Zahlenfolge in unendlich vielen Schritten 1 erreichen, welche Erkenntnis ich durch Ersetzung des unendlichen Vorganges durch einen endlichen erzielt hätte, sondern die Glieder der unendlichen Zahlenfolge nähern sich der 1, was wir dadurch ausdrücken können, dass wir sagen, die Folge zeige in ihrem Werden eindeutig auf 1. Dieses durch die erwähnte Übereinkunft erklärte Zeigen kann aus dem endlichen



Bildungsgesetz a(n) = n/(n+1) in endlichen vielen Schritten abgelesen werden. Im Bereich der Zahlen kann das ,.Zeigen" durch eine bestimmte „Gebärde", nämlich eine als endlos vorgestellte Zahlenfolge, die durch a(n) = n/(n+1) gesteuert wird, dargestellt werden. Hier wird also ein endlicher Vorgang durch einen unendlichen „illustriert".

Der umgekehrte Schritt vom Unendlichen zum Endlichen, der uns besonders angeht, erfolgt hier anscheinend, wie man glauben könnte, beim Ablesen des Bildungsgesetzes aus der vorgelegten Zahlenfolge. Dies aber ist ein Irrtum.

Verständlicherweise kann niemand eine unendliche Zahlenfolge anschreiben, um dann zu verlangen: „Gib das Bildungsgesetz dazu!" Schreibt er aber nur, was seine einzige Möglichkeit ist, endlich viele Glieder einer Folge an, von der er behauptet, sie solle unendlich sein, so gibt es unendlich viele Möglichkeiten, die Folge festzusetzen, und damit unendlich viele Bildungsgesetze. Daher ist (1/2, 2/3, 3/4, ...) nur eine Illustration zum bereits bekannten Gesetz a(n) = n/(n+1), aber höchstens per Konvention zur Herleitung des Bildungsgesetzes zu brauchen. Solche Konventionen bedeuten aber eben die vorherige Kenntnis des Gesetzes. An dieser Stelle könnten wir nun versucht sein, etwa folgenden Standpunkt einzunehmen. Die unendliche Zahlenfolge existiert nur potentiell in ihrem endlichen Bildungsgesetz. Stelle ich daher eine Frage über die Beschaffenheit der unendlichen Folge, so ist das eine Frage über eine endliche Regel und damit in endlich vielen Schritten zu beantworten. Danach ist jede derartige Frage prinzipiell beantwortbar.

Wer sagt uns aber, dass nicht nur einige, wie bekannt ist, sondern alle Fragen über endliche Regeln in endlich vielen Schritten beantwortbar seien?

Soll ich eine Frage über eine (durch ein Bildungsgesetz) gegebene Folge beantworten, z. B. „Kommt unter den Dezimalstellen von n irgendwo eine ununterbrochene Folge von 15 Neunen vor?", so sind folgende Fälle denkbar:

Erstens ist es möglich, dass ich nach einiger Zeit bei der Aktualisierung der Folge, beim Aufzählen ihrer Elemente, diese Neunergruppe auffinde.

Zweitens ist es möglich, dass ich aus dem Bildungsgesetz der Folge (in endlich vielen Schritten) herleiten kann, dass es eine derartige Neunergruppe irgendwo gibt und ich dann die Folge solange durchlaufe, bis ich (notwendigerweise in endlich vielen Schritten) die Gruppe auffinde.

Drittens ist es denkbar, dass ich in endlich vielen Schritten aus dem Bildungsgesetz die Unmöglichkeit des Auftretens dieser Neunergruppe herleiten kann.

Viertens ist es möglich, dass ich weder die Existenz der Neunergruppe zeigen kann noch in der Lage bin, die



Unmöglichkeit ihrer Existenz aus dem Bildungsgesetz herzuleiten. Die Folge selbst kann mir nicht helfen, da ich, um die Nichtexistenz zu beweisen, sie in ihrer unendlichen Länge durchlaufen müsste und erst nachher, wo es aber kein nachher gibt, den Beweis hätte, dass die Neunergruppe nicht doch noch auftritt.

Auf die Frage, ob einer unendlichen Folge, die durch eine endliche Regel repräsentiert wird, eine bestimmte Eigenschaft zukomme, gibt es also drei Antworten. Es kann geantwortet werden: „Mit Recht schreiben wir dieser Folge diese Eigenschaft zu", oder „Mit Recht sprechen wir dieser Folge diese Eigenschaft ab", oder „Weder können wir mit Recht diese Eigenschaft zuschreiben noch mit Recht absprechen" (10). Man kann nun die Ansicht vertreten, dass es nicht so wichtig sei, was wir von einer unendlichen Folge wissen, sondern, dass die unendliche Folge unabhängig von unserem Wissen an sich ja diese oder jene Eigenschaft besitze. Daher habe man in der „wahren Mathematik", gelöst von den Beschränkungen unserer Kenntnisse, die unendliche Folge an sich zu behandeln, der mit Sicherheit eine bestimmte Eigenschaft entweder zukommt oder nicht zukommt. Dieser Standpunkt - es ist der „klassische" - kann als platonisch oder ultrarealistisch gekennzeichnet werden, da er eine vom Menschen unabhängige objektive Existenz mathematischer Objekte voraussetzt.

Solange man sich darüber im klaren ist, dass man ein metaphysisches Postulat den Überlegungen zugrunde legt, ist dieser Standpunkt, sofern er unter Beachtung der üblichen Ansprüche nach Korrektheit der Herleitung der Sätze verwendet wird, nicht zu verwerfen. Wird der platonische Glaube an die reale Existenz mathematischer Gegenstände jedoch verschwiegen oder als „selbstverständlich klar" unkontrolliert eingeschmuggelt, ist der Anspruch der Mathematik auf Wahrheit oder auch nur auf intellektuelle Ehrlichkeit verfehlt. Wer den platonischen Glauben nicht teilt, muss den mathematischen Gegenstand als nur in seiner Definition (Sprachregel) greifbar betrachten. Da diese Regel erst durch den Menschen aktualisiert werden kann, verdankt in dieser Sicht das mathematische Objekt seine Existenz stets dem Menschen. Daraus folgt, dass man es nur solcher Eigenschaften fähig erachten darf, die Sätzen entsprechen, die von Menschen unter Beachtung des korrekten Sprachgebrauchs aus der entsprechenden Regel hergeleitet werden können. Muss ich zur Beantwortung einer Frage notwendig eine unendliche Folge durchlaufen, so ist die Antwort nicht korrekt herzustellen, und die betreffende Eigenschaft ist daher nicht nur für mich unerkennbar, sondern sie kommt dem mathematischen Gegenstand auch überhaupt oder „an sich" nicht zu.

Es ist also nicht auszuschließen, dass eine Frage über eine endlich definierte unendliche Folge weder bejahend noch



verneinend zu beantworten ist, sondern sich als grundsätzlich unbeantwortbar erweist. Das ist der Glaube der Intuitionisten (11).



Mathematische Theorien



Entstehung

2.2.1. Die Entstehung der Theorien

Wir haben die Wurzeln der Mathematik bereits kennengelernt. Nun wollen wir uns den Theorien der Mathematik zuwenden, die diesen Wurzeln entspringen.

Unter Theorie versteht man hier ein sprachlich fixiertes Netz von Beziehungen zwischen bestimmten, eben für diese Theorie charakteristischen Begriffen. Woher kommen nun diese Begriffe und die Ideen zu ihrer Verknüpfung?

Es ist weiter oben schon ausgesprochen worden, dass sich quantitative Eigenschaften unserem Wahrnehmungsapparat nicht etwa wie Schmerzen aufdrängen, sondern dass es einer besonderen Gestimmtheit, einer spezifischen Richtung unserer Aufmerksamkeit bedarf, sie wahrzunehmen.

Das heißt, dass der Empfindung die Erwartung der Empfindung vorausgehen muss, mit anderen Worten, dass ich in der Empfindungswelt das suche, was ich mir vorher vorgestellt habe. Der Begriff einer quantitativen Eigenschaft ist also nicht etwa einfach der Natur entnommen, sondern ist eine im Hinblick auf sie konstruierte Schöpfung des Verstandes. Solange wir die Funktionsweise des Gehirns nicht übersehen, können wir hier nur weiterkommen, wenn wir das Problem sozusagen von „innen" betrachten. Das soll nun bedeuten,



dass man versuchen kann, den rätselhaften Vorgang der Begriffsschöpfung in sich ablaufen zu lassen, nachzuerleben. Das liefert zwar keine mitteilbare Erklärung dieses Phänomens, aber das subjektive Fragebedürfnis wird dadurch reduziert. Wie aber gelangt man zu einem derartigen Erlebnis?

Es gibt Situationen, in denen ein ausreichend befähigter Mensch mit hoher Wahrscheinlichkeit ein ganz bestimmtes Erlebnis hat; wir wollen sie die charakteristische Situation nennen.

Es ist nun unsere Aufgabe, nach den charakteristischen Situationen zu fragen, die zur Entstehung der zu einer mathematischen Theorie gehörenden Begriffe und ihrer Verknüpfung führen.

Ich unterscheide zwischen semantisch und syntaktisch betonten Situationen. Die durch diese Situationen induzierten Fragestellungen entspringen dabei im ersten Fall einem echten Bedarf, im zweiten dagegen einem Bedürfnis, das dem Wunsch entspringt, alle denkbaren Fragen beantworten zu können.

In der semantischen Situation ist noch die Wurzel der Mathematik, die wichtige Frage nach einem problemlösenden Algorithmus etwa, erkennbar. Hier wird der Begriffsapparat im steten Hinblick auf die Umwelt des praktischen Lebens entworfen und gehandhabt.

Dagegen ist es für die syntaktische Situation typisch, dass sie mit der Anwendung der Überlegungen nichts zu tun hat. Hier hat sich die Methode zur Problemlösung von dieser gelöst.

Syntaktische Fragen entspringen dem Wunsch, die in einer konkreten Problemlösung vorkommenden Begriffe und Methoden auf ihre möglichen wechselseitigen Beziehungen allseitig zu untersuchen, auf andere Probleme zu übertragen, zu verallgemeinern und zu vergleichen.

Während die semantische Situation jedem normalen Menschen eine bestimmte Frage aufdrängt, steht man in der syntaktischen Situation in einer reich strukturierten Umwelt, in der viele Fragen möglich sind. Worauf die Situation zielt, wird erst dann erkennbar, wenn ich mein Vorleben in die Situation einbeziehe. Um syntaktische Situationen entsprechend erleben zu können, bedarf es also einer bestimmten Erziehung.

Das Erlebnis einer Struktureinsicht, um deren reproduzierbare Entstehung wir uns hier bemühen, hängt nicht nur von der aktuellen objektiven Situation, sondern von der totalen charakteristischen Situation ab, also auch davon, wie weit der Mensch an einem bestimmten objektiven Geist (12) Anteil hat, welche Techniken zur Problemlösung, Weltansichten und Erinnerungen er mitbringt.

Die Theorie ist also ein durch objektiven Geist, Individuum und äußere charakteristische Situation bedingtes Sprachspiel.





Symbolsprache

2.2.2. Die Symbolsprache

Die Beschränktheit des Bereichs, den der Mensch auf einmal zu überschauen vermag, bringt es mit sich, dass eine Theorie nicht mit einem Schritt vor uns treten kann, sondern dass dies nur in vielen Schritten möglich ist. Wir können uns also eine Theorie nur Stück für Stück vor Augen stellen.

Da wir die Theorie ein sprachlich fixiertes Netz genannt haben, können wir sagen, dass ein mit einem Blick überschaubarer Teil der Theorie Satz heißen möge.

Der überschaubare Satz tritt in der Mathematik dabei an die Stelle des erkennbaren Sachverhalts in der deskriptiven Naturwissenschaft, der Beweis tritt an die Stelle des Experiments. Im bewiesenen Satz entfaltet der mathematische Gegenstand (die Sprachregel) explizit seine Eigenschaften, so wie der physische Gegenstand im wahrnehmbaren Sachverhalt des Experiments.

Um einen Satz richtig verstehen, das heißt, seine Position im betreffenden Sprachspiel entsprechend einschätzen und ihn damit so verwenden zu können, wie er „gemeint" war, ist es notwendig, sich mit der „Umgebung" des Satzes in der Theorie zu beschäftigen. Diese Verbindung des Satzes mit anderen Teilen der Theorie stellt der Beweis her (13). Darüber hinaus



bestimmt er die Bedeutung der im Satz vorkommenden Begriffe näher. Dadurch, daß in ihm die Begriffe des Satzes verwendet werden, wird beispielhaft gezeigt, wie sie verwendet werden sollen, also was sie bedeuten (14).

Der Beweis soll nicht nur den Satz klären, sondern er soll darüber hinaus zur Annahme, zur Bejahung des Satzes bewegen.

An dieser Stelle wollen wir nun den oben erwähnten Vergleich zwischen Naturwissenschaft und Mathematik derart näher ausführen, dass wir die jeweilige Funktion von Experiment und Beweis überdenken.

Im Experiment ergibt sich aus erfahrungsgemäß reproduzierbaren Bedingungen ein Ergebnis, das ich mir auch durchaus anders denken könnte. Im Beweis dagegen konstruiere ich (auf einem erfahrungsgemäß reproduzierbaren Weg) schrittweise sprachliche Umformungen, deren Richtigkeit ich jeweils als notwendig, so und nicht anders, einsehe.

Der spezifische Unterschied liegt also darin, dass sich das Resultat im Experiment ergibt, ohne dass ich es wie beim Beweis als notwendig einsehen kann, es ist einfach da (15). Was wird aber aus dem Beweis, jenem Netz von Aussagen, durch dessen Maschen sich die Einsicht ausbreitet, wenn es so ausgedehnt ist, dass ich in der vielmaligen Folge der Einzelschritte die Richtung, das Ganze, aus den Augen verliere und plötzlich am Ziel bin, ohne zu wissen, wie ich dahin gelangte?

Soll man nun einen derartigen Beweis, der eigentlich Experiment genannt werden muss, in der Mathematik zulassen?

Es muss hier folgendes Argument bedacht werden: Wenn schon der „Urgrund“ der Mathematik, das allgemeine Sprachverständnis (zwar im Hinblick auf das durch unzählige Erfahrungen induzierte Vertrauen), einfach vorausgesetzt wird und geglaubt werden muss, warum soll dann nicht der Einzelsatz direkt von der Erfahrung abhängen?

Darauf kann mehrfach geantwortet werden. Einmal lasse ich das Experiment in der Mathematik deswegen nicht zu, weil das Erlebnis, das man bei einem Experiment hat, von dem, das man dann hat, wenn man etwas einsieht, verschieden ist. Es handelt sich um verschiedene Arten der Stützung eines Satzes, die ich aus formalen Gründen nicht vermengen will.

Andrerseits soll hier ein Prinzip beachtet werden, das ich den Stufenbau der Sicherheit nenne. Dieses methodische und heuristische Prinzip ist etwa so gedacht: Es werde eine Funktion angenommen, die jeder Aussage eine Zahl zuordne, und zwar derart, daß diese Zahl umso größer sei, je größer die Zahl der Erfahrungen ist, die diesen Satz als zutreffend erscheinen lassen, und je sachgerechter diese Erfahrungen



gewonnen und dokumentiert sind. Es scheint nun im Sinn der positiven Wissenschaft vernünftig zu verlangen, dass kein Satz mit niedrigerem Bestätigungsgrad gegen einen höher beglaubigten Satz behauptet werden darf.

Es ist nun einerseits klar, dass man beim Aufbau einer Wissenschaft in der Basis und in der Methode die Sätze des höchsten Bestätigungsgrades zu verwenden sucht, und es ist andererseits ebenso bekannt, dass die Basis und die Methode der exakten Wissenschaften die mathematischen Sätze nicht entbehren können. Daraus folgere ich, dass die mathematischen Sätze durch die höchsten Grade der Bestätigung ausgezeichnet sein sollen. Daher ergibt es sich, dass zur Stützung eines mathematischen Satzes nicht ein (einzelnes) Experiment, sondern ein Beweis zu verwenden ist, da dieser nur auf der bestbestätigten Annahme des korrekten Sprachgebrauchs aufbaut.

Gibt es nun eine Möglichkeit, aus mathematischen Experimenten Beweise zu machen? Wir, die wir der Natur vertrauen (16), sind der Meinung, dass diese „Experimente" für den Beweise wären, der sie zu überblicken vermöchte und es für uns nur deswegen nicht sind, weil unser Verstand nicht ausreicht, sie in ihrem vollen Umfang auf einmal zu verarbeiten. Es wird also eine Methode benötigt, die den Gang der Überlegung so strafft, dass wir sie zu überschauen vermögen und ihr nicht mehr blind zu folgen brauchen (zwar das Ziel erreichend, aber eben nicht wissend, wie). Wir brauchen eine Sprache, die sich so von der täglichen unterscheidet, dass wir in ihr wie in Siebenmeilenstiefeln das Gestrüpp des Wortkleinkrams zu überlaufen vermögen.

Diese höhere Sprache ist die mathematische Symbolik. Diese dient also nicht etwa nur der Bequemlichkeit, sondern sie ist es erst, die die Einsicht erlaubt und damit das „blinde" Experiment zum zustimmbaren Beweis macht.

In zwei Schritten entsteht aus der gewöhnlichen Sprache die Symbolsprache. Im ersten Schritt wird dabei die Sprache vom akustischen in den optischen Bereich übergesiedelt. Dazu müssen die Wörter durch Zeichen ersetzt werden, und die Regeln zur Verwendung der Wörter werden zu Regeln für den Umgang mit Schriftzeichen. Dies wird auf Grund der Erfahrung unternommen, dass der optische Anteil unseres Aufmerksamkeitsbereiches „übersichtlicher" ist als der akustische. Außerdem gewinnt man dadurch eine andauernde Gegenwärtigkeit der Information, die das verklingende Wort nicht besitzt.

Während also im ersten Schritt die Sprache in einen anderen Sinnesbereich übergeführt wird, um sie praktikabler zu machen, erfährt sie dagegen im zweiten Schritt eine strukturelle Veränderung. Einmal wird die Sprache dabei durch Konzentration auf einen bestimmten Bereich (hier die Mathematik) verengt, von überflüssigen Formen befreit und

dann durch einprägsame Symbole für die in der Umgangssprache nicht vorkommenden Begriffe der betreffenden Theorie erweitert. Wir wollen diesen Vorgang die Anpassung nennen.

Andererseits besitzt die Symbolsprache eine, wie wir sagen wollen, wachsende Syntax. In der Umgangssprache werden gewonnene Einsichten gleichsam irgendwo hinterlegt (bestenfalls im Gedächtnis), während die Regeln der Sprache davon unberührt bleiben. Man kann, nachdem man einen Satz akzeptiert hat, durchaus einen grammatikalisch richtigen Satz bilden, der dem akzeptierten ganz und gar widerspricht.

In der Symbolsprache dagegen wird der einmal akzeptierte Satz in die Grammatik der Sprache aufgenommen (oft bezeichnet man einen Satz im Hinblick auf seine sprachregulierende Funktion als Formel). Dies ist deswegen von Nutzen, weil es dem Menschen sehr viel leichter fällt, eine Sprachregel anzuwenden, als durch Vorstellung eines Sachverhaltes daran den Sprachgebrauch immer neu selbst zu regulieren. Die wachsende Syntax sorgt dafür, dass ich das einmal als richtig Eingesehene als Basis künftiger Sätze benützen muss, ohne an mehr als eine Sprachregel denken zu müssen.

In einer genügend ausgebildeten Symbolsprache lässt sich der Gang eines mathematischen „Experimentes" zum Gang eines Beweises verkürzen, d. h. übersichtlich und einsehbar machen. Ich stimme zu mit den Worten: „Ja, so gebrauche ich meine Zeichen!" (17) Wir können also sagen, dass sich die mathematischen Probleme durch die Symbolik der Struktur des menschlichen Verstandes bestens anpassen lassen. Auch dieser Methode sind, wie dem Verstände selbst, durch die endliche Natur des Menschen allerdings unübersteigbare Grenzen gesetzt.

Es sei noch angemerkt, dass man die Symbolik meist auch in Algorithmen benützt, obwohl sie hier nur bequem, aber nicht notwendig ist. Ein Algorithmus ist nämlich ein Instrument zur Lebensbewältigung, bei dem es, wie bei allen Geräten dieser Art, nicht auf das Verständnis des Prinzips, sondern nur auf seine korrekte Handhabung ankommt.



Axiome

2.2.3. Die Axiomatisierung einer Theorie

Im historischen Prozess der Entstehung einer mathematischen Theorie kommt es nach einer Phase der Begriffsschöpfung und Verknüpfung, des „trial and error", der heuristischen und induktiven Methoden des Vermutens und glücklichen Ratens schließlich zur Phase der „systematischen Kodifizierung" der Ergebnisse.

Die typische Haltung eines Mathematikers auf eine Behauptung eines Kollegen hin ist eine Aufforderung: Beweise das! Will man sich nicht endlos und zirkulär argumentieren, so muss man darüber übereinkommen, was als Ausgangspunkt der Überlegung dienen darf. Gewisse Behauptungen müssen durch Übereinkunft der Fachleute ausgewählt und als nicht beweisbedürftig gekennzeichnet werden. Wer dann nach einem Beweis für einen derartigen Satz - ein sogenanntes Axiom - fragt, begibt sich außerhalb der Spielregeln, er wird nicht ernst genommen.

Von der Antike bis ins 19. Jahrhundert hielt man daran fest, dass ein Axiom außerdem die Qualität der Evidenz haben müsse, also jedem gutwilligen und begabten Menschen unmittelbar einsichtig sein solle. Aus der Erfahrung heraus, dass verschiedene Menschen, je nach ihrer Erziehung und



Erfahrung, ganz verschiedene Behauptungen für unmittelbar klar halten, während diese Sätze sich doch widersprechen, hat man diese Forderung „offiziell" fallengelassen (de facto allerdings nur auf eine „Plausibilität für Fachleute" entsprechender Erziehung reduziert, wie wir sehen werden).

Wichtig ist die Frage, ob die „Axiomatisierung" einer Theorie gelungen ist.

Gemeint ist damit, ob sich aus den vorgelegten Axiomen alles das herleiten lässt, was man vorher erraten oder vermutet hatte und was man sonst noch fragen könnte. Leider hat sich gezeigt, dass es mathematische Theorien gibt, die durch ein vernünftiges System von Axiomen und Schlussregeln (zur Herleitung von Sätzen aus den Axiomen) nicht vollständig erfasst werden können. Es ist dabei möglich, sinnvolle Fragen zu stellen, die nachweislich im gegebenen axiomatischen System nicht entschieden werden können.

Diese Erkenntnis bringt es notwendig mit sich, dass der Mathematiker in manchen Bereichen seiner Wissenschaft, wenn er auf dem Standpunkt steht, dass jede einschlägige Frage beantwortbar sein müsse, ständig neue Axiome erzeugen muss, ohne dass dieser Prozess je ein Ende haben könnte. Woher nimmt er seine neuen Axiome? Woher weiß er, wie die (im System nicht beweisbare) Antwort auf eine offene Frage lauten muss? Die Antwort ist sehr einfach:

Er erfindet sich, was er nicht weiß und nie wissen kann. Dabei ist er in seiner Phantasie mehrfach eingeschränkt: Seine Behauptung muss zur bisher vorliegenden Theorie passen (darf ihr nirgendwo widersprechen) und sie muss sowohl den Fachleuten plausibel klingen als auch „fruchtbar" in dem Sinn sein, dass mit ihrer Hilfe viele weitere Sätze sympathischen Inhalts hergeleitet werden können (trial and error!).

Damit wird deutlich, dass es in großen Bereichen der üblichen (klassischen) Mathematik nicht um, „Wahrheit" im naiven Sinne geht. Einige Fachleute lehnen diese Art der Mathematik daher auch ab.

In besonders deutlicher Weise hat sich das Problem der Axiomatisierung einer Theorie im Fall der Mengenlehre gezeigt. Hier ist die Diskussion über die geeigneten Axiome noch wenig weit gediehen (im Hinblick auf die Vollendung, nicht aber auf die geleistete Arbeit gesehen).

Da der Begriff „Menge" (wie jeder andere) seinen Sinn aus den Axiomen bezieht, die ihn betreffen, und da über diese Axiome noch keine Einigkeit erzielt wurde, ist er notwendig noch „unscharf". Dies ist bei seiner Verwendung sehr zu bedenken (18).

Abschließend will ich jene Forderungen an ein axiomatisches System aufstellen, die, wie mir scheint, das Verlangen nach (naiver) Wahrheit ersetzt haben:



Vergleichsweise schwach ist das „Postulat der Realität", das verlangt, dass die Theorie bei passender Semantik der „Wirklichkeit“ (was das auch immer sei) zumindest nicht widerspricht, besser aber, auf sie anwendbar ist, d. h. sie teilweise abbildet.

Das stärkere „formale Postulat" verlangt Widerspruchsfreiheit der Theorie (möglichst beweisbar, zumindest aber empirisch für möglichst viele Sätze gesichert).

Das stärkste „psychologische Postulat" (stark kulturbezogen) fordert Lehr- und Erlernbarkeit der Theorie. Ihre Axiome sollen plausibel, die Theorie soll „schön" und „interessant" sein. Schließlich hat sie zum jeweiligen Trend (der mathematischen Mode der Zeit) zu passen.

Gern verschwiegen wird das „soziologische Postulat": Die Beschäftigung mit der Theorie muss sich „lohnen", sei es durch relativ leichte Herstellbarkeit wissenschaftlicher Arbeiten, durch Karrierechancen oder durch große Erfolgshonorare bei Lösung spezieller Fragen (die z. B. von wirtschaftlichem Interesse sind).



Didaktik

4



Pädagogische Checkliste

Im vorangegangenen Text sind implizit Forderungen an den Mathematikunterricht enthalten. Hier sind einige davon aufgelistet.

Ganz im Sinn eines pädagogischen Aufsatzes ist die Leserin/der Leser aufgefordert, die passenden Begründungen der Forderungen im Konnex mit dem vorliegenden Text herzustellen.

Forderungen an einen guten Mathematikunterricht:

❖ Der erfolgreiche Unterricht bildet nicht die „Struktur" der „Wissenschaft Mathematik" (etwa im Sinne von Bourbaki) ab, sondern baut auf den menschlichen Bedürfnissen und Eigenschaften auf und hilft Fähigkeiten zu entwickeln.

❖ Unterricht geht vom Leben aus und führt zum Leben hin (von der Praxis über die Lehre zur Praxis)

❖ Ethisch verantwortbarer Unterricht schmuggelt keine metaphysischen Annahmen ein, sondern benennt und diskutiert sie.

❖ Logische Definition eines mathematischen Begriffs, einer mathematischen Methode ist als Verknüpfung möglich, als primäre Einführung oder gar als „Fundament" unbrauchbar.



❖ Das „Verständnis“ der Mathematik kann nur in ihrem Gebrauch getestet werden.

❖ Die aktuelle Theorie des Gedächtnisses (im Text bisher nicht explizit erwähnt) geht davon aus, dass der Mensch drei Grundtypen der Erinnerung besitzt; alle diese Typen müssen im Unterricht angesprochen werden, also:

· Semantisch: „Ich erkenne ein Dreieck“

· Prozedural: „Ich dividiere“

· Episodisch: „Gestern hat die Lehrerin mit uns ein Modell gebastelt“

❖ In genetischer Methodik wird durch Erzeugung der „Charakteristische Situation“ ein Begriff, eine Methode (episodisch und semantisch) eingeführt.

❖ Die „Bedeutung“ eines mathematischen Begriffs erklärt sich primär prozedural durch seinen Gebrauch und wird sekundär semantisch und episodisch vernetzt.

❖ Das Erlernen eines Algorithmus wird zwar durch „Beweise“ semantisch verknüpft, ist aber eine genuin prozedurale Technik, die im Gebrauch erlernt und durch den Gebrauch legitimiert wird.



Anmerkungen

5

Anmerkungen

1. Vgl. Wittgenstein, Philosophische Untersuchungen (PU) 242.
2. Vgl. PU 67. 2.
3. Im Sinn von W. Kamlah und P. Lorenzen, Logische Propädeutik.
4. Vgl. Wittgenstein, Tractus logico -philosophicus 6.02-6.031.
5. Leibniz, Brief an Remond, Phil. Sehr. III, pag 622 (zitiert nach H. Weyl).
6. Husserl, Log. Untersuchungen, 2. Aufl., II, S. 267 (zitiert nach H. Weyl).
7. Vgl. H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, 3. Aufl., pag. 74.
8. Vgl. S. S. Kleene und R. E. Vesley, The Foundations of Intuitionistic Mathematics, pag. 73.
9. Vgl. Wittgenstein, Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik (BGM), Anhang II 12.
10. Vgl. Gräupl, Bemerkungen zum Tertium non datur, Wissenschaftl. Nachrichten Nr. 48, Sept. 1978.
11. Vgl. Gräupl, Bemerkungen zum Begriff der „Wahrheit" in der Mathematik, Jahresbericht 1979/80 des Akad. Gymnasiums Salzburg.
12. Im Sinn von Nicolai Hartmann.
13. Vgl. BGM I 28, BGM V 7.
14. Vgl. BGM II 31, BGM II 41.
15. Vgl. BGM II 39, BGM III 41.
16. Sonst würde ich die Arbeit nicht geschrieben haben und Sie würden sie nicht lesen.
17. Vgl. BGM I 153, BGM II 2.
18. Vgl. Paul J. Cohen, Set Theory and the Continuum Hypothesis, 1966, pag. 150ff.

Literaturverzeichnis

Zur Einführung empfohlen:

O. Becker, Die Grundlagen der Mathematik (Karl Alber Verlag).

P. Bemays, Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik (Wissensch. Buchg. Darmstadt).

N. Bourbaki, Elemente der Mathematikgeschichte (Vandenhoeck & Ruprecht).

S. Körner, Philosophie der Mathematik (Nymphenburger).

H. Meschkowski, Grundlagen der modernen Mathematik (Wiss. Buchg. Darmstadt).

H. G. Steiner, Didaktik der Mathematik (Wiss. Buchg. Darmstadt).

M. Otte, Mathematiker über die Mathematik (Springer).

F. Waismann, Einführung in das mathematische Denken (DTV).

H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft (R. Oldenbourg).

Für weitere Studien sei verwiesen auf:

E. W. Beth, The Foundations of Mathematics (North Holland).

A. Heyting, Intuitionism (North Holland).

S. C. Kleene, R. E. Vesley, The Foundations of Intuitionistic Mathematics (North Holland)

